

Dérivabilité d'une fonction numérique – résumé – 1bac Science

I. Généralités :

1) Soit f est une fonction définie sur un intervalle ouvert de centre x_0 :

f est dérivable au point $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$ (finie) . Dans cette situation :

a) Le nombre dérivé de f au point x_0 est $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

b) La pente de la droite tangente à la courbe au point x_0 est $f'(x_0)$ donc son équation est : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty \Leftrightarrow$ la courbe C_f admet une demi-tangente à droite de x_0 verticale orientée vers le haut

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty \Leftrightarrow$ la courbe C_f admet une demi-tangente à gauche de x_0 verticale orientée vers le bas

2) f est dérivable dans un intervalle ouvert $\Leftrightarrow f$ est dérivable en tout point de cet intervalle .
 f est dérivable dans un intervalle $[a; b]$ $\Leftrightarrow f$ est dérivable dans $]a; b[$; à droite de a et à gauche de b .
 f est dérivable dans un intervalle $I \Rightarrow$ la fonction $f'(x)$ pour $x \in I$ est la fonction dérivée (première) de f sur I . En général : $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$ (dérivées successives) .

II. Dérivées des fonctions usuelles :

$f(x)$	x^n	k	$1/x$	$\sqrt{x}$	$\sin x$	$\cos x$
$f'(x)$	nx^{n-1}	0	$-1/x^2$	$1/(2\sqrt{x})$	$\cos x$	$-\sin x$

III. Opérations sur les dérivées :

f	$u \pm v$	uv	u^n	$1/u$	u/v	$\sqrt{u}$	uov
f'	$u' \pm v'$	$u'v + uv'$	$nu'u^{n-1}$	$-u'/u^2$	$\frac{u'v - uv'}{u^2}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$v' \times u'ov$

IV. Applications :

1) La monotonie : f est dérivable dans un intervalle I .

a) $f' = 0$ sur $I \Leftrightarrow f$ est constante sur I .

b) $f' \geq 0$ sur $I \Leftrightarrow f$ est croissante sur I .

c) $f' < 0$ sur $I \Leftrightarrow f$ est strictement décroissante sur I .

2) Les extrémums : f est dérivable dans un intervalle ouvert de centre x_0 .

a) f admet un extremum en $x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$ (réciproque fausse x^3).

b) $f'(x_0) = 0$ et f' change son signe au tour de $x_0 \Leftrightarrow f(x_0)$ est un extremum pour f

c) $f''(x_0) = 0$ et f'' garde son signe au tour de $x_0 \Leftrightarrow f(x_0)$ est un extremum pour f

3) Une équation différentielle est une égalité liant une fonction à ses dérivées.

Remarque : $y(x) = a \cos wx + b \sin wx$ est une solution de l'équation $y'' + w^2 y = 0$