

Arithmétique dans l'ensemble \mathbb{N}

Tronc commun Scientifique .

A) L'ensemble \mathbb{N} :

- \mathbb{N} est l'ensemble des nombres entiers naturels : 1 ; +5 ; 0 ; 122... Et on écrit $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$ alors :
- $5 \in \mathbb{N}$ (Appartient) car 5 est un nombre entier naturel.
- $(-7) \notin \mathbb{N}$ car (-7) n'est pas un entier naturel.
- Les nombres $\frac{14}{2}$; $\sqrt{9}$; 3,0 ; $\frac{-26}{-2}$; 8 sont des éléments de \mathbb{N} .
- Les nombres $\sqrt{3}$; -5 ; $\frac{26}{-2}$; $\frac{13}{2}$; 3,1 n'appartiennent pas à \mathbb{N} .

B) La Parité d'un nombre :

- Un nombre est dit pair s'il s'écrit sous forme de $x = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$: $14 = 2 \times 7$ mais $15 = 2 \times 7,5$ et $7,5 \notin \mathbb{N}$ donc 14 est un nbr pair et 15 n'est pas pair.
- Un nombre est dit impair s'il s'écrit sous forme de $x = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}$: $37 = 2 \times 18 + 1$ et $37 \in \mathbb{N}$ et 26 n'est pas impair : $26 = 2 \times ? + 1$
- Tout entier naturel est soit pair, soit impair.
- Tout entier naturel a la même parité que son carré.
- La somme de 2 entiers de même parité est un entier pair.
- La somme de 2 entiers de différente parité est un entier impair.
- Le produit de 2 entiers n'est impair que dans le cas où les 2 facteurs son impairs.

(Voir Exercice 1)

C) Les Multiples et les Diviseurs :

- a est multiple de b ou b est diviseur de a si $a = b \times k$ / $k \in \mathbb{N}$
- 45 est multiple de 9 car $45 = 9 \times 5$ et $5 \in \mathbb{N}$ donc 9 divise 45 par contre 45 n'est pas un multiple de 8.
- m est un multiple commun à a et b si m est multiple de a et m est multiple aussi de b .
- 1 divise tout nombre. 0 est multiple de tout nombre
- Tout nombre non nul est diviseur et multiple de lui-même.
- $\text{ppcm}(a; b) = m$ veut dire que m est le plus petit commun multiple de a et de b : $\text{ppcm}(6; 8) = 24$
- $\text{Pgcd}(a; b) = d$ veut dire que d est le plus grand commun diviseur de a et de b : $\text{Pgcd}(12; 18) = 6$

D) Les nombres Premiers :

- Un nombre est Premier s'il admet exactement 2 diviseurs ; c.-à-d. dépourvu de diviseur effectif comme 2 ; 3 ; 7 ; 17 ; ...
- 6 n'est pas premier car il se divise par 1 ; 6 et 2 .
- 1 n'est pas premier car il admet un seul diviseur.
- Le plus petit diviseur différent de 1 de tout nombre entier est premier.
- Tout nombre entier est le produit de facteurs premiers (décomposition en éléments simples) : $144 = 2^4 \times 3^2$; $36 = 2^2 \times 3^2$ et $24 = 2^3 \times 3^1$ (l'Opération de décomposition ?)
- Si un nombre entier n'admet aucun diviseur--premier dont le carré est inférieur à ce nombre -- alors ce dernier est premier.

E) Usage de la décomposition en elms simples :

- Nombre de diviseurs du nombre 24 est : $n = (3 + 1) \times (1 + 1) = 8$ diviseurs de 24.
 - Chercher les diviseurs de 24 : $(2^3; 2^2; 2^1; 2^0) \times (3^1; 3^0) = (8; 4; 2; 1) \times (3; 1)$ alors
 $D_{24} = \{24; 8; 12; 4; 6; 2; 3; 1\}$
 - Calcul de $ppcm(54; 12) = ppcm(3^2 \times 5; 2^2 \times 3^1) = 5 \times 2^2 \times 3^2 = 180$.
 - $ppcm$: Produit des facteurs non communs et des facteurs communs élevés au plus grand degré.
 - Calcul de $Pgcd(15; 36) = Pgcd(5 \times 3^1; 2^2 \times 3^2) = 3^1 = 3$.
 $Pgcd$ = Produit des facteurs communs (seuls) élevés au plus petit degré.
 - Algorithme d'Euclide :
 - ✓ On divise le grand nombre par le petit.
 - ✓ On effectue ensuite des divisions successives en prenant le reste comme nouveau diviseur et le diviseur comme nouveau dividende pour atteindre un reste nul.
 - ✓ Le dernier reste non nul est le pgcd cherché.
- Exp : $36 = 24 \times 1 + 12 \rightarrow 24 = 12 \times 2 + 0$ alors $pgcd(24; 36) = 12$.

F) Les nombres Premiers entre eux :

- Deux nombres entiers sont premiers entre eux si leur pgcd est 1.
- 22 et 15 sont premiers entre eux car ils n'ont pas de diviseur commun autre que 1.
- 21 et 12 ne sont pas premiers entre eux car ils sont divisibles par le nombre 3.

G) Des Remarques :

- On utilise le crible d'Eratosthène pour déterminer tous les nombres premiers inférieurs à un nombre donné.
- a divise b signifie que : $\frac{b}{a} \in \mathbb{N}$.
- a et b sont premiers entre eux signifie que $\frac{a}{b}$ est irréductible.
- si d est un diviseur commun aux nombres a et b alors d divise aussi :
 $a + b$; $a - b$; $a \times b$; $Pgcd(a; b)$; na et a^n avec $n \in \mathbb{N}^*$.
- $D_0 = \mathbb{N}^*$; $M_1 = \mathbb{N}$; $M_0 = \{0\}$; $D_1 = \{1\}$; $M_2 = 2\mathbb{N}$.
- Un nombre est un carré parfait s'il est le carré d'un autre entier comme : 49 ; 121.