

Polynômes et fonctions réciproques

Variations · Théorème des valeurs intermédiaires · Courbes

DEUX EXERCICES · ORIGINAL EN FRANÇAIS REMIS EN FORME

EXERCICE 01 Un polynôme du troisième degré

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1.$$

- Déterminer la dérivée de f et dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}$.
- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle, notée α .
- Encadrer α entre deux entiers consécutifs.
- Donner un encadrement de α d'amplitude 0,5.
- Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .

Application du théorème des valeurs intermédiaires. Soient deux réels $a < b$ et une fonction g continue sur $[a, b]$, telle que

$$g(a) < ab \quad \text{et} \quad g(b) > b^2.$$

Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $g(c) = bc$.

EXERCICE 02 Étude d'une fonction rationnelle et de sa réciproque

On considère la fonction f définie sur $I = [0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3}.$$

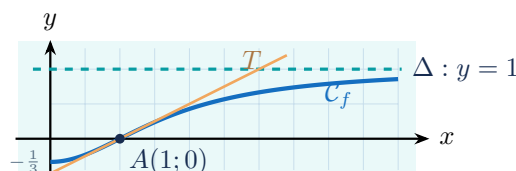
- Vérifier que, pour tout $x \in I$,

$$f(x) = 1 - \frac{4}{x^2 + 3}.$$

- Étudier les variations de f à l'aide du signe de $f'(x)$.
- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} . Déterminer son ensemble de définition $J = f(I)$.
- Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.
- On donne la courbe $\mathcal{C}_f$ et sa tangente (T) au point $A(1; 0)$, d'équation

$$(T) : y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.$$

Construire dans le même repère la courbe $\mathcal{C}_{f^{-1}}$.



Graphique de référence : courbe initiale, tangente et asymptote. La réciproque est à construire.