

Équations et continuité

Racines cubiques · Fonctions par morceaux · Inverse

QUATRE EXERCICES · ÉNONCÉS TRADUITS

EXERCICE 01 Première équation radicaleRésoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\sqrt[3]{2-x} = 1.$$

EXERCICE 02 Différence de racines cubiquesRésoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\sqrt[3]{x^2+4} - \sqrt[3]{x^2-4} = 2.$$

EXERCICE 03 Limites et fonction définie par morceaux**Partie A.** Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{8x^3 + x^2 + 1} - x \right).$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 + x - 2} + x}{x^2}.$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 2} - x \right).$

Partie B. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^3 + 1}, & \text{si } x \geq 0, \\ \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2 + 1} - 1}, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

- Déterminer son ensemble de définition D_f .
- Étudier la continuité de f en 0.
- Soit g la restriction de f à $[0, +\infty[$.
 - Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $[0, 1[$.
 - Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in [0, 1[$.

EXERCICE 04 Existence, unicité et approximation d'une racine

On considère l'équation

$$\sqrt[3]{3-x} - x = 0.$$

- Montrer que cette équation admet une unique solution α dans l'intervalle $]1, 2[$.
- À l'aide du théorème des valeurs intermédiaires et d'un procédé de recherche adapté, donner un encadrement de α d'amplitude 0,2.