

MATHACCESS / LES OUTILS ESSENTIELS DE L'ANALYSE

La fonction partie entière

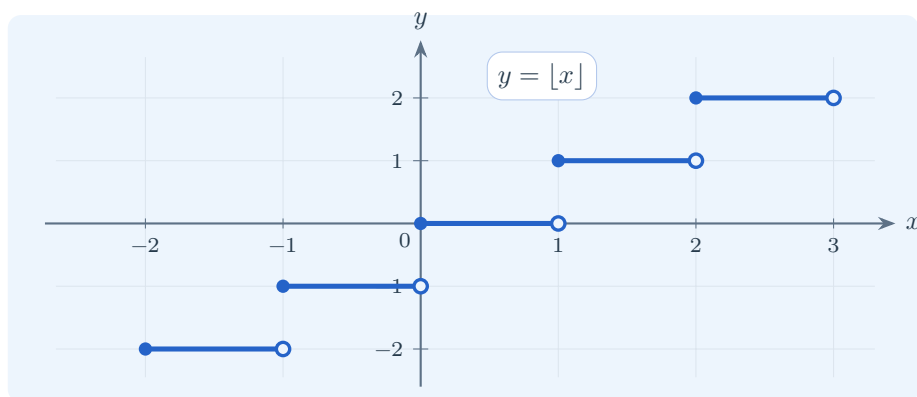
Définition, propriétés démontrées et exercices corrigés

01 Définition fondamentale

Pour tout réel x , sa **partie entière**, notée $\lfloor x \rfloor$ (ou parfois $E(x)$), est le **plus grand entier inférieur ou égal à x** . C'est l'unique entier n tel que

$$\lfloor x \rfloor = n \iff n \leq x < n + 1.$$

Représentation graphique : une fonction « en escalier »



Chaque marche est incluse à gauche (point plein) et exclue à droite (point creux).

Lire correctement une partie entière

$$\lfloor 3,8 \rfloor = 3$$

$$\lfloor 5 \rfloor = 5$$

$$\lfloor -1,2 \rfloor = -2$$

$$\lfloor -3 \rfloor = -3$$

Attention : pour un nombre négatif, on descend jusqu'à l'entier immédiatement inférieur.

02 / PROPRIÉTÉS DE BASE

Des propriétés à savoir démontrer

Propriété 1 Encadrement caractéristique

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1} \quad \text{ou encore} \quad \boxed{x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x}.$$

Démonstration. Posons $n = \lfloor x \rfloor$. La définition donne $n \leq x < n + 1$. En soustrayant 1 à la seconde inégalité, on obtient $x - 1 < n$.

Propriété 2 Translation par un entier

Pour tout réel x et tout entier relatif p ,

$$\boxed{\lfloor x + p \rfloor = \lfloor x \rfloor + p}.$$

Démonstration. Si $n \leq x < n + 1$, alors $n + p \leq x + p < n + p + 1$. Comme $n + p$ est entier, on a $\lfloor x + p \rfloor = n + p$.

Exemple. $\lfloor \sqrt{2} + 4 \rfloor = \lfloor \sqrt{2} \rfloor + 4 = 5$.

Propriété 3 Croissance

Si $x \leq y$, alors $\boxed{\lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor}$. La fonction partie entière est **croissante (au sens large)**, mais n'est pas strictement croissante. **Démonstration.** Soient $m = \lfloor x \rfloor$ et $n = \lfloor y \rfloor$. Si $m > n$, alors $m \geq n + 1$, d'où $x \geq m \geq n + 1 > y$, contradiction.

Exemple. $0,2 < 0,9$ et pourtant $\lfloor 0,2 \rfloor = \lfloor 0,9 \rfloor = 0$.

Propriété 4 Partie fractionnaire

On appelle **partie fractionnaire** de x le nombre $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Alors

$$\boxed{x = \lfloor x \rfloor + \{x\} \quad \text{avec} \quad 0 \leq \{x\} < 1}.$$

Démonstration. On soustrait $\lfloor x \rfloor$ dans $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Exemple. $\{2,75\} = 0,75$, tandis que $\{-2,75\} = 0,25$, car $\lfloor -2,75 \rfloor = -3$.

Un critère utile

$$\boxed{\lfloor x \rfloor = x \iff x \in \mathbb{Z}}.$$

En effet, $\lfloor x \rfloor$ est toujours entier ; réciproquement, si x est entier, $x \leq x < x + 1$, donc $\lfloor x \rfloor = x$.

03 / IDENTITÉS ET CALCULS

Ce qui change avec les opérations

Propriété 5 Partie entière de l'opposé

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \mathbb{Z}, \\ -1, & \text{si } x \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Démonstration. Écrivons $x = n + t$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq t < 1$. Si $t = 0$, $-x = -n$ est entier, donc $\lfloor -x \rfloor = -n$. Si $0 < t < 1$, alors $-n - 1 < -x < -n$, donc $\lfloor -x \rfloor = -n - 1$.

Exemple. $\lfloor 2,4 \rfloor + \lfloor -2,4 \rfloor = 2 + (-3) = -1$.

Propriété 6 Partie entière d'une somme

Pour tous réels x et y ,

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1.$$

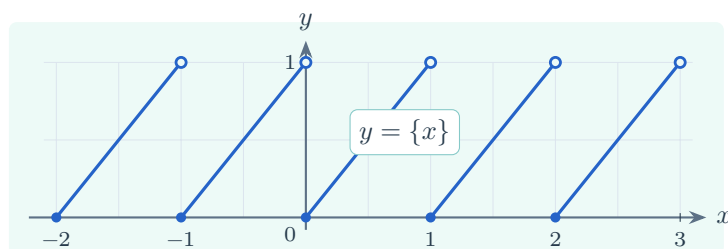
En fait, $\lfloor x + y \rfloor$ vaut l'une des deux bornes. **Démonstration.** Posons $x = m + r$ et $y = n + s$ avec $m, n \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq r, s < 1$. Alors $x + y = m + n + (r + s)$ et $0 \leq r + s < 2$. Donc $\lfloor r + s \rfloor \in \{0, 1\}$ et

$$\lfloor x + y \rfloor = m + n + \lfloor r + s \rfloor.$$

Piège classique : la partie entière n'est pas additive

$$\lfloor 0,6 \rfloor + \lfloor 0,6 \rfloor = 0 \quad \text{mais} \quad \lfloor 0,6 + 0,6 \rfloor = \lfloor 1,2 \rfloor = 1.$$

Ainsi, $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ n'est **pas** une égalité générale. Elle est vraie exactement quand $\{x\} + \{y\} < 1$.

La partie fractionnaire : une dent de scie

04 / MÉTHODES ET EXEMPLES

Résoudre équations et inéquations

Méthode générale

Pour résoudre une équation $\lfloor g(x) \rfloor = k$, avec $k \in \mathbb{Z}$, remplacer la partie entière par un **double encadrement** :

$$\lfloor g(x) \rfloor = k \iff k \leq g(x) < k + 1.$$

Pour une inéquation, retenir aussi :

$$\lfloor g(x) \rfloor \geq k \iff g(x) \geq k, \quad \lfloor g(x) \rfloor \leq k \iff g(x) < k + 1.$$

Exemple 1 Une équation immédiate

Résoudre $\lfloor 3x - 2 \rfloor = 4$.

$$4 \leq 3x - 2 < 5 \iff 6 \leq 3x < 7 \iff 2 \leq x < \frac{7}{3}.$$

Solution : $S = \left[2, \frac{7}{3} \right[.$

Exemple 2 Une inéquation

Résoudre $\lfloor 2x + 1 \rfloor \leq 3$.

$$\lfloor 2x + 1 \rfloor \leq 3 \iff 2x + 1 < 4 \iff x < \frac{3}{2}.$$

Solution : $S = \left] -\infty, \frac{3}{2} \right[.$

Exemple 3 Une équation avec deux parties entières

Résoudre $\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor = 4$. Écrivons $x = n + t$, avec $n \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq t < 1$. Alors

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor = n + 2n + \lfloor 2t \rfloor = 3n + \lfloor 2t \rfloor.$$

Comme $0 \leq 2t < 2$, on a $\lfloor 2t \rfloor \in \{0, 1\}$. Il faut donc $3n + \lfloor 2t \rfloor = 4$, soit nécessairement $n = 1$ et $\lfloor 2t \rfloor = 1$. Ainsi, $\frac{1}{2} \leq t < 1$ et $x = 1 + t$.

$$S = \left[\frac{3}{2}, 2 \right[.$$

Erreur à éviter

L'équivalence $\lfloor g(x) \rfloor = k \iff k \leq g(x) \leq k + 1$ est **fausse** : la borne de droite est toujours **stricte**. Par exemple, $\lfloor 3 \rfloor = 3$, pas 2.

06 / S'ENTRAÎNER

Exercices corrigés et synthèse

Exercice 1 Trouver un ensemble de solutions

Déterminer les réels x tels que $\lfloor 2x - 3 \rfloor = -2$.

Correction. $-2 \leq 2x - 3 < -1$, d'où $1 \leq 2x < 2$, puis

$$x \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right[.$$

Exercice 2 Résoudre une équation mixte

Résoudre $\lfloor x \rfloor = 2x - 1$.

Correction. Posons $n = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$. L'équation donne $x = (n + 1)/2$. En imposant $n \leq x < n + 1$,

$$n \leq \frac{n+1}{2} < n+1 \iff -1 < n \leq 1.$$

Donc $n \in \{0, 1\}$, d'où

$$S = \left\{ \frac{1}{2}, 1 \right\}.$$

Vérification : $\lfloor 1/2 \rfloor = 0 = 2(1/2) - 1$ et $\lfloor 1 \rfloor = 1 = 2(1) - 1$.

Exercice 3 Encadrer une partie fractionnaire

Montrer que, pour tout réel x , $\{x\} + \{-x\}$ vaut 0 ou 1.

Correction. Par définition,

$$\{x\} + \{-x\} = x - \lfloor x \rfloor - x - \lfloor -x \rfloor = -(\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor).$$

D'après la propriété 5, cette somme vaut 0 si $x \in \mathbb{Z}$ et 1 sinon.

L'essentiel à retenir

1. $\lfloor x \rfloor = n \iff n \leq x < n + 1$: l'intervalle est fermé à gauche, ouvert à droite.
2. $\lfloor x + p \rfloor = \lfloor x \rfloor + p$ pour tout entier p .
3. $0 \leq x - \lfloor x \rfloor < 1$ et $\lfloor x \rfloor$ est croissante.
4. $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor \in \{0, -1\}$; $\lfloor x + y \rfloor$ n'est pas, en général, la somme des parties entières.
5. La fonction est continue hors de $\mathbb{Z}$ et présente un saut en chaque entier.