

MATHACCESS / LES FONCTIONS USUELLES

La fonction arctangente

Définition, propriétés démontrées, graphiques et exercices corrigés

01 Définition fondamentale

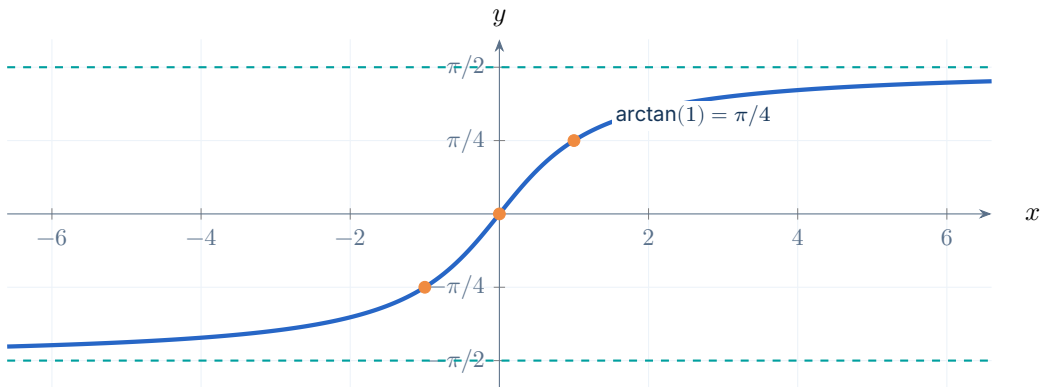
La fonction tangente est continue et strictement croissante sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$; elle y prend toutes les valeurs réelles. Sa fonction réciproque est appelée **arctangente**, notée $\arctan$:

$$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

$$\tan(\arctan x) = x.$$

Autrement dit, $\arctan x$ est l'**unique angle** $\theta \in] -\pi/2, \pi/2 [$ dont la tangente vaut x .

Courbe représentative : $y = \arctan(x)$



Angles remarquables

x	$-\sqrt{3}$	-1	0	$1/\sqrt{3}$	1
$\arctan x$	$-\pi/3$	$-\pi/4$	0	$\pi/6$	$\pi/4$

02 / ÉTUDE DE LA FONCTION

Dérivée, variations et symétrie

Théorème — Dérivée de l'arctangente

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction arctangente est dérivable et :

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Démonstration

Posons $y = \arctan x$. Alors $\tan y = x$ et $y \in]-\pi/2, \pi/2[$. La tangente étant une bijection dérivable de dérivée strictement positive, sa réciproque est dérivable. En dérivant l'identité $\tan y = x$:

$$(1 + \tan^2 y) y' = 1 \implies (1 + x^2) y' = 1 \implies y' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Conséquences : croissance et parité

- $\frac{1}{1+x^2} > 0$: $\arctan$ est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan(-x) = -\arctan x$: la fonction est **impaire**.

Preuve de l'impairité

Soit $\theta = \arctan x$. On a $\tan(-\theta) = -\tan \theta = -x$. Comme $-\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$, l'unicité dans la définition impose $\arctan(-x) = -\theta = -\arctan x$. La courbe admet donc l'origine pour **centre de symétrie**.

Tableau de variations

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$(\arctan x)'$	+ partout		
$\arctan x$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow 0 \nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

Exemple corrigé — Équation et inéquation

1. $\arctan(3x-2) = \frac{\pi}{6}$ équivaut à $3x-2 = \tan(\pi/6) = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Ainsi :

$$x = \frac{2 + 1/\sqrt{3}}{3}.$$

2. $\arctan(2x+1) \geq \pi/4$. Par stricte croissance, $2x+1 \geq \tan(\pi/4) = 1$, d'où $x \geq 0$.

Attention au domaine! On a $\arctan(\tan \theta) = \theta$ uniquement lorsque $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$. Ainsi $\arctan(\tan(3\pi/4)) = -\pi/4$, et non $3\pi/4$.

03 / COMPORTEMENT GLOBAL

Limites, courbure et encadrements

Limites et asymptotes horizontales

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}.$$

La courbe admet les deux asymptotes horizontales $y = \pi/2$ et $y = -\pi/2$. Ces niveaux ne sont **jamais atteints**.

Justification des limites

Sur $] -\pi/2, \pi/2[$, $\tan$ est strictement croissante, avec $\tan \theta \rightarrow +\infty$ lorsque $\theta \rightarrow (\pi/2)^-$. Par réciproque, $\arctan x \rightarrow \pi/2$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. La seconde limite en découle par imparité.

Convexité et point d'inflexion

En dérivant une seconde fois :

$$(\arctan x)'' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}.$$

Le dénominateur étant strictement positif, $\arctan$ est **convexe** sur $] -\infty, 0[$ et **concave** sur $]0, +\infty[$. Le point $O(0,0)$ est un **point d'inflexion**.

Encadrements utiles pour $x \geq 0$

$$\frac{x}{1+x^2} \leq \arctan x \leq x \quad \text{et} \quad 0 \leq x - \arctan x \leq \frac{x^3}{3}.$$

04 / IDENTITÉS

Formules et précautions sur les angles

Identité de réciprocity

Pour tout $x \neq 0$:

$$\arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Démonstration pour $x > 0$ (puis $x < 0$)

Notons $\alpha = \arctan x \in]0, \pi/2[$. Alors $\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = 1/\tan \alpha = 1/x$. Or $\frac{\pi}{2} - \alpha \in]0, \pi/2[$: par unicité, $\arctan(1/x) = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Le cas $x < 0$ suit par imparité.

Formule d'addition (cas sans correction d'angle)

Pour $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $ab < 1$:

$$\arctan a + \arctan b = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right).$$

Démonstration et rôle de la condition $ab < 1$

Posons $\alpha = \arctan a$ et $\beta = \arctan b$. La formule de la tangente d'une somme donne

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{a+b}{1-ab}.$$

La condition $ab < 1$ assure que $\alpha + \beta \in]-\pi/2, \pi/2[$. On peut alors appliquer $\arctan$ et retrouver l'égalité encadrée.

Deux exemples détaillés

1. Avec $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{1}{3}$, puisque $ab = 1/6 < 1$:

$$\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \arctan\left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{6}}\right) = \arctan 1 = \boxed{\frac{\pi}{4}}.$$

2. La condition échoue pour $a = 2$ et $b = 1$ ($ab = 2$). La somme appartient à $] \pi/2, \pi[$ et sa tangente vaut -3 . Ainsi :

$$\boxed{\arctan 2 + \arctan 1 = \pi - \arctan 3}.$$

À retenir : ne pas utiliser la formule d'addition sans vérifier l'intervalle dans lequel se trouve la somme des angles !

05 / CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL

Dérivées, primitives et limites

Dérivée d'une fonction composée

Si u est dérivable sur un intervalle I , alors :

$$(\arctan(u(x)))' = \frac{u'(x)}{1 + u(x)^2}.$$

Exemple — Dériver $f(x) = \arctan(3x^2 - 1)$

Avec $u(x) = 3x^2 - 1$ et $u'(x) = 6x$:

$$f'(x) = \frac{6x}{1 + (3x^2 - 1)^2}.$$

Limites classiques

Équivalents au voisinage de 0 et de $+\infty$

$$\arctan x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

$$\frac{\pi}{2} - \arctan x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}.$$

La première relation vient de $\arctan(0) = 0$ et $\arctan'(0) = 1$. Pour la seconde, si $x > 0$: $\frac{\pi}{2} - \arctan x = \arctan(1/x) \sim 1/x$.

06 / S'ENTRAÎNER

Exercices corrigés et synthèse

Exercice 1 — Résoudre une équation avec deux arctangentes

Résoudre sur $\mathbb{R}$:

$$\arctan x + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4}.$$

Solution. La somme des deux arctangentes a le signe de x . Donc $x > 0$. Comme la somme vaut $\pi/4 < \pi/2$, la formule de la tangente donne, avec $1 - 2x^2 > 0$:

$$\frac{3x}{1 - 2x^2} = 1 \iff 2x^2 + 3x - 1 = 0 \iff x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}.$$

Seule la racine positive convient :

$$S = \left\{ \frac{\sqrt{17} - 3}{4} \right\}.$$

Exercice 2 — Étudier une fonction

Soit $g(x) = \arctan x - x$ sur $\mathbb{R}$. Étudier ses variations et son signe.**Solution.** On calcule

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 = -\frac{x^2}{1+x^2} \leq 0.$$

La fonction g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ (sa dérivée ne s'annule qu'en 0). Comme $g(0) = 0$:

$$g(x) > 0 \ (x < 0), \quad g(0) = 0, \quad g(x) < 0 \ (x > 0).$$

Exemples — Calculs de limites

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(3x)}{\sin(2x)} = \frac{3}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right) = 1.$$

Bilan essentiel

- Domaine : $\mathbb{R}$; image : $] -\pi/2, \pi/2[$.
- Fonction impaire, strictement croissante.
- $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

— Asymptotes : $y = \pm\pi/2$.— $\arctan x \sim x$ en 0.

— _____