FICHE DE COURS / ANALYSE MATHÉMATIQUE

Théorème de Rolle et théorème des accroissements finis

Cours reformulé · Démonstrations · Interprétations graphiques · Exercices

L'IDÉE ESSENTIELLE
De la tangente horizontale au lien entre *variation de la fonction* et *dérivée* : trois résultats fondamentaux pour étudier les fonctions.

01 Dérivée et extremum local

Une condition nécessaire pour un minimum ou un maximum local

THÉORÈME D' EXTREMUM LOCAL
Soit f une fonction dérivable en un point a situé **à l'intérieur de son domaine de définition**. Si f admet un extremum local en a, alors

$$\boxed{f'(a) = 0.}$$

ATTENTION À LA RÉCIPROQUE
La condition $f'(a) = 0$ ne suffit pas à garantir un extremum. Par exemple, pour $f(x) = x^3$, on a $f'(0) = 0$, mais 0 n'est ni un maximum ni un minimum local.

02 Le théorème de Rolle

Une tangente horizontale entre deux points de même hauteur

THÉORÈME DE ROLLE
Soient $a < b$ et f une fonction telle que :
1. f est continue sur $[a, b]$;
2. f est dérivable sur $]a, b[$;
3. $f(a) = f(b)$.

Alors il existe au moins un réel $c \in]a, b[$ vérifiant

$$\boxed{f'(c) = 0.}$$

Pourquoi ? La courbe part d'une hauteur $f(a)$ et y revient en b. Sous ces hypothèses, elle possède au moins une tangente horizontale entre les deux points.

02 Le théorème de Rolle

Démonstration, portée du résultat et rôle des hypothèses

DÉMONSTRATION

Puisque f est continue sur le segment $[a, b]$, elle y atteint un minimum m et un maximum M.
Premier cas : si $m = M$, alors f est constante sur $[a, b]$. Par conséquent, $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b[$.
Second cas : si $m < M$, au moins l'une des valeurs extrêmes m ou M diffère de $f(a) = f(b)$. L'extremum correspondant est donc atteint en un point c strictement compris entre a et b. La fonction étant dérivable en c, le théorème de Fermat donne $f'(c) = 0$. **CQFD.**

Remarques importantes

1. **Le point c peut ne pas être unique.** Avec $f(x) = x^3 - 3x$ sur $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$, on a $f(-\sqrt{3}) = f(\sqrt{3}) = 0$, tandis que $f'(-1) = f'(1) = 0$.

2. **Rolle garantit une existence, pas une formule pour c.** Il faut souvent résoudre $f'(x) = 0$ pour le déterminer.

3. **La continuité aux bornes est indispensable.** Pour $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ sur $[0, 1]$, on a $f(0) = f(1) = 0$ et $f'(x) = 1$ pour $0 < x < 1$. Mais f est discontinue en 1 : la conclusion échoue.

4. **La dérivabilité à l'intérieur est indispensable.** Pour $f(x) = |x|$ sur $[-1, 1]$, on a $f(-1) = f(1) = 1$ et f est continue, mais non dérivable en 0. Sa dérivée ne s'annule nulle part où elle existe dans $]-1, 1[$.

EXERCICE D'APPLICATION

Montrer que l'équation

$$6x^5 - 27x^2 + 18x - 1 = 0$$

admet au moins une solution dans l'intervalle $]0, 1[$. Indication : étudier le signe du polynôme en quelques points de $[0, 1]$, puis utiliser la continuité.

POINT MÉTHODE

Avant d'appliquer Rolle, vérifier *séparément* les trois hypothèses : continuité, dérivabilité et égalité des valeurs aux extrémités.

03 Le théorème des accroissements finis

TAF — aussi appelé théorème de Lagrange

ÉNONCÉ

Soient $a < b$ et f une fonction **continue sur** $[a, b]$ et **dérivable sur** $]a, b[$. Alors il existe au moins un $c \in]a, b[$ tel que

$$\boxed{f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}} \iff \boxed{f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).}$$

Démonstration. Construisons la fonction auxiliaire

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

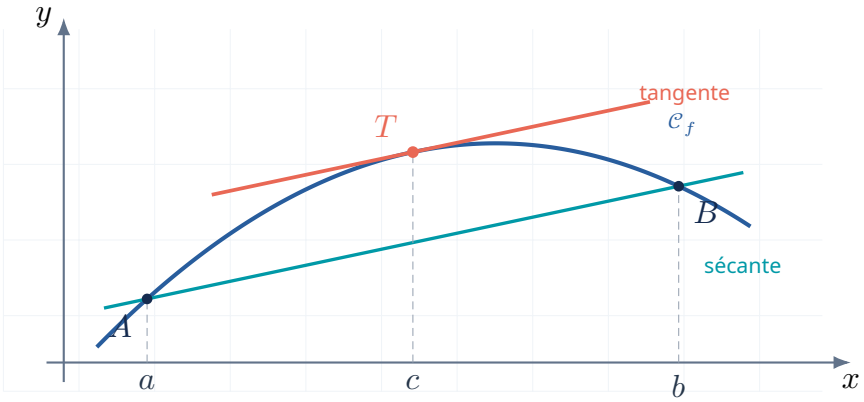
Elle est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Par le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Or

$$\varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

La relation annoncée en découle. **CQFD.**

Interprétation graphique

La droite sécante (AB), où $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$, a pour coefficient directeur $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Le TAF affirme qu'il existe au moins une **tangente à la courbe parallèle à cette sécante**.



À RETENIR

Le théorème de Rolle est un cas particulier du TAF : lorsque $f(a) = f(b)$, la pente de la sécante vaut zéro.

EXERCICE — APPLIQUER LE TAF

Soit $f(x) = x^3 - 3x + 12$ sur $[1, 4]$. Montrer qu'il existe $c \in]1, 4[$ tel que $f(4) - f(1) = 3f'(c)$, puis déterminer c.

04 Inégalités des accroissements finis

Encadrer une variation à l'aide des valeurs de la dérivée

ENCADREMENT PAR DEUX CONSTANTES

Supposons f continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et $a<b$. S'il existe deux réels $m \le M$ tels que

$$m \le f'(x) \le M \qquad \text{pour tout } x \in]a,b[,$$

alors

$$\boxed{m(b-a) \le f(b)-f(a) \le M(b-a).}$$

Démonstration. Le TAF fournit $c \in]a,b[$ tel que $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$. Comme $m \le f'(c) \le M$ et $b-a>0$, il suffit de multiplier l'encadrement par $b-a$. **CQFD.**

VERSION EN VALEUR ABSOLUE

Soit f dérivable sur un intervalle I. Si, pour un réel $M \ge 0$,

$$|f'(x)| \le M \qquad \text{pour tout } x \in I,$$

alors, pour tous $a,b \in I$,

$$\boxed{|f(b)-f(a)| \le M|b-a|.}$$

Démonstration. Si $a=b$, l'inégalité est immédiate. Si $a<b$, le résultat précédent appliqué avec $m=-M$ donne

$$-M(b-a) \le f(b)-f(a) \le M(b-a).$$

Cela équivaut à $|f(b)-f(a)| \le M(b-a)$. Si $b<a$, on échange les rôles de a et b. **CQFD.**

CONSÉQUENCE — FONCTION LIPSCHITZIENNE

Une fonction dont la dérivée est majorée en valeur absolue par M sur un intervalle alors sa variation est au plus M fois la distance entre les points.

EXERCICES D'APPLICATION

1. Pour tous réels a,b, établir :

$$|\cos b-\cos a| \le |b-a|, \qquad |\sin b-\sin a| \le |b-a|.$$

2. Pour $0 \le a < b$, démontrer :

$$\frac{b-a}{1+b^2} \le \arctan(b)-\arctan(a) \le \frac{b-a}{1+a^2}.$$

05 Conséquences pour les fonctions

Constante, monotonie et stricte monotonie

DÉRIVÉE NULLE ET FONCTION CONSTANTE

Si une fonction f est dérivable sur un intervalle I et si

$$f'(x) = 0 \qquad \text{pour tout } x \in I,$$

alors f est **constante** sur I.

Démonstration. Pour $a, b \in I$, le TAF (ou l'inégalité des accroissements finis avec $M = 0$) entraîne $f(b) - f(a) = 0$. Ainsi, $f(a) = f(b)$. **CQFD.**

SIGNE DE LA DÉRIVÉE ET VARIATIONS

Soit f dérivable sur un intervalle I. Alors :

— f est **croissante** sur I si et seulement si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$;

— f est **décroissante** sur I si et seulement si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$.

Idée de démonstration. Lorsque $f'(x) \geq 0$, le TAF donne, pour $a < b$, $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \geq 0$. La réciproque suit de la définition de la dérivée comme limite de taux de variation de même signe.

NE PAS CONFONDRE : CROISSANTE / STRICTEMENT CROISSANTE

Une condition **suffisante** pour que f soit strictement croissante est $f'(x) > 0$ sur I. Il suffit même que $f'(x) \geq 0$ partout et que les zéros de f' soient en nombre fini ou dénombrable : sur aucun sous-intervalle non trivial la fonction ne peut être constante. De même, une dérivée ≤ 0, dont les zéros sont au plus dénombrables, assure la stricte décroissance.

EXEMPLE COMMENTÉ

Considérons $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ sur $[0, 2]$. On calcule

$$f'(x) = 3x(x - 2).$$

Pour $0 < x < 2$, on a $f'(x) < 0$, tandis que $f'(0) = f'(2) = 0$. La fonction est donc **strictement décroissante** sur $[0, 2]$, malgré l'annulation de sa dérivée aux bornes.

Bilan. Rolle fournit une tangente horizontale ; le TAF relie une variation à une dérivée ; ses inégalités permettent de contrôler les variations.