

FICHE DE SYNTHÈSE / MATHÉMATIQUES

Les suites adjacentes

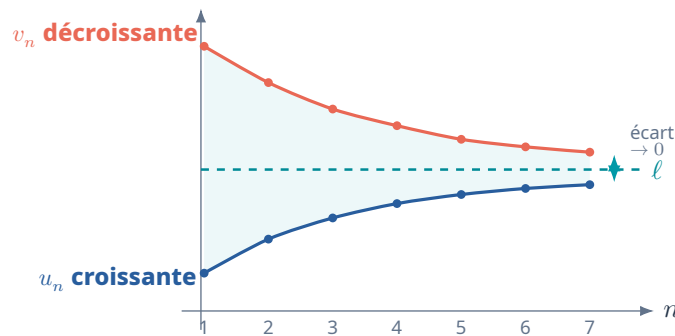
Définitions · Démonstrations · Encadrement de la limite · Exemples résolus

L'IDÉE EN UNE PHRASE

Deux suites se rapprochent l'une de l'autre : l'une monte, l'autre descend, et la distance entre leurs termes tend vers zéro. Elles finissent donc par converger vers **la même limite**.

01 Comprendre la notion

Deux encadrements de plus en plus précis



DÉFINITION — SUITES ADJACENTES

Deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont **adjacentes** lorsque :

1. (u_n) est **croissante** : $u_{n+1} \geq u_n$;
2. (v_n) est **décroissante** : $v_{n+1} \leq v_n$;
3. leur écart tend vers zéro : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$.

On peut bien sûr échanger les rôles de u_n et v_n .

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE

Chaque intervalle $I_n = [u_n, v_n]$ contient le suivant :

$$I_{n+1} \subset I_n, \quad \text{longueur}(I_n) = v_n - u_n \rightarrow 0.$$

Les intervalles se resserrent autour d'un **seul nombre réel** l .

02 Théorème fondamental

Les deux suites possèdent une limite commune

THÉORÈME DES SUITES ADJACENTES

Si les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, alors elles sont **convergentes** et ont **la même limite** ℓ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell.$$

De plus, pour tout indice n , on a l'encadrement

$$u_n \leq \ell \leq v_n.$$

Démonstration complète.

- 1. Ordre des deux suites.** Posons $d_n = v_n - u_n$. Comme (u_n) croît et (v_n) décroît, (d_n) est décroissante. Or $d_n \rightarrow 0$. Une suite décroissante de limite nulle a tous ses termes positifs ou nuls. Donc

$$\forall n, \quad u_n \leq v_n.$$

- 2. Convergence.** Pour $n \geq 0$, la croissance de (u_n) et l'ordre précédent donnent

$$u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0.$$

Ainsi (u_n) est croissante et majorée, donc elle converge vers ℓ_1 . De même, (v_n) est décroissante et minorée, donc elle converge vers ℓ_2 .

- 3. Égalité des limites.** Par différence des limites,

$$\ell_2 - \ell_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0,$$

d'où $\ell_1 = \ell_2 = \ell$.

- 4. Encadrement de ℓ .** Pour $m \geq n$, la monotonie donne $u_n \leq u_m$ et $v_m \leq v_n$. En faisant tendre m vers $+\infty$,

$$u_n \leq \ell \leq v_n. \quad (\text{CQFD})$$

03 Un outil de précision

Contrôler l'erreur sans connaître la limite

MAJORATION DES ERREURS

Puisque $u_n \leq \ell \leq v_n$,

$$0 \leq \ell - u_n \leq v_n - u_n$$

$$0 \leq v_n - \ell \leq v_n - u_n.$$

Ainsi, pour garantir une erreur inférieure ou égale à $\varepsilon > 0$, il suffit de choisir n tel que $v_n - u_n \leq \varepsilon$.

À NE PAS CONFONDRE

$u_n \leq v_n$ **ne suffit pas** à prouver l'adjacence. Il faut aussi vérifier les deux sens de variation et la convergence de l'écart vers zéro.

04 Exemple 1 — Limite connue

Deux suites rationnelles convergent vers 2

Pour tout $n \geq 0$, considérons

$$u_n = 2 - \frac{1}{n+1}, \quad v_n = 2 + \frac{1}{n+1}.$$

VÉRIFICATION PAS À PAS

1. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$: (u_n) est strictement croissante.
2. $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{(n+1)(n+2)} < 0$: (v_n) est strictement décroissante.
3. $v_n - u_n = \frac{2}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Les deux suites sont **adjacentes** et leur limite commune vaut $\boxed{\ell = 2}$.

n	u_n	v_n	$v_n - u_n$
0	1	3	2
1	1,5	2,5	1
3	1,75	2,25	0,5
9	1,9	2,1	0,2
99	1,99	2,01	0,02

APPLICATION — APPROXIMATION À 10^{-2}

Pour avoir $|u_n - 2| \leq 10^{-2}$, on peut imposer $v_n - u_n = \frac{2}{n+1} \leq 10^{-2}$, soit $n \geq 199$. C'est une garantie d'erreur fondée sur l'encadrement, même si elle n'est pas optimale ici.

05 Exemple 2 — Une somme

Établir la convergence sans calculer la limite

Pour $n \geq 1$, posons

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}, \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

DÉMONSTRATION

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0.$$

De plus,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= -\frac{1}{n(n+1)^2} < 0. \end{aligned}$$

Enfin, $v_n - u_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$. Les suites sont donc adjacentes.

CONSÉQUENCE

Il existe un réel L tel que $u_n \leq L \leq u_n + \frac{1}{n}$. En particulier, la somme $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge. Sa valeur $\frac{\pi^2}{6}$ est un résultat classique, non nécessaire à cette démonstration.

06 Exemple 3 — Dichotomie

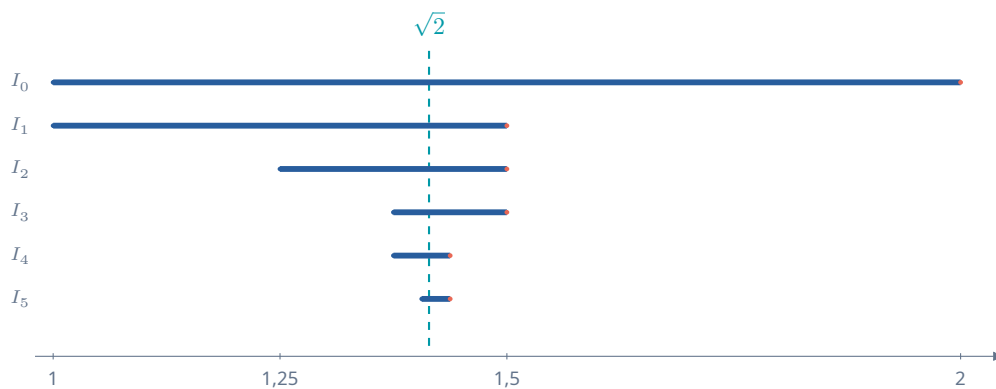
Construire deux suites adjacentes qui encadrent $\sqrt{2}$

CONSTRUCTION

On commence avec $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$. À l'étape n , on calcule le milieu $m_n = \frac{u_n + v_n}{2}$, puis on pose

$$(u_{n+1}, v_{n+1}) = \begin{cases} (m_n, v_n) & \text{si } m_n^2 < 2, \\ (u_n, m_n) & \text{si } m_n^2 \geq 2. \end{cases}$$

L'idée : on conserve systématiquement la moitié de l'intervalle qui contient $\sqrt{2}$.



n	u_n	v_n	$v_n - u_n$
0	1	2	1
1	1	1,5	0,5
2	1,25	1,5	0,25
3	1,375	1,5	0,125
4	1,375	1,4375	0,0625
5	1,40625	1,4375	0,03125

POURQUOI ÇA MARCHE?

- À chaque étape, $u_{n+1} \geq u_n$ et $v_{n+1} \leq v_n$.
- L'invariant $u_n \leq \sqrt{2} \leq v_n$ est préservé par le choix du demi-intervalle.
- La longueur est divisée par deux : $v_n - u_n = \frac{1}{2^n} \rightarrow 0$.

Les deux suites sont adjacentes. Leur limite commune est $\sqrt{2}$; de plus,

$$|\sqrt{2} - u_n| \leq 2^{-n} \quad \text{et} \quad |v_n - \sqrt{2}| \leq 2^{-n}.$$

07 Exercice corrigé

Encadrer la somme de la série harmonique alternée

_____ Pour tout $n \geq 1$, notons $S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. On définit

$$u_n = S_{2n}, \quad v_n = S_{2n-1}.$$

MONTRER QUE (u_n) ET (v_n) SONT ADJACENTES

On calcule les variations :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0,$$

$$v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} < 0.$$

L'écart est exactement le dernier terme omis :

$$v_n - u_n = S_{2n-1} - S_{2n} = \frac{1}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Conclusion : u_n croît, v_n décroît et elles convergent vers une limite commune L avec

$$S_{2n} \leq L \leq S_{2n-1}, \quad 0 \leq L - S_{2n} \leq \frac{1}{2n}.$$

08 Méthode à retenir

Le raisonnement type en quatre gestes

- 1. Identifier** la suite qui doit croître et celle qui doit décroître.
- 2. Calculer** $u_{n+1} - u_n$ et $v_{n+1} - v_n$ pour étudier leur signe.
- 3. Calculer** $v_n - u_n$ et vérifier que cet écart tend vers zéro.
- 4. Conclure** à la convergence vers un même ℓ , puis utiliser $u_n \leq \ell \leq v_n$.

DEUX ERREURS FRÉQUENTES

1. Deux suites monotones de sens opposés ne sont pas forcément adjacentes : $u_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ et $v_n = 3 + \frac{1}{n+1}$ ont un écart qui tend vers 2.
2. La condition $v_n - u_n \rightarrow 0$ ne suffit pas sans monotonie : $u_n = (-1)^n$ et $v_n = (-1)^n + \frac{1}{n+1}$ ont un écart nul à la limite, mais elles divergent.

Idée-clé : monotonie + écart nul = limite commune.