

MATHACCESS / NOMBRES COMPLEXES

Les racines n -ièmes de l'unité

Cours essentiel, démonstrations, figures et exemples corrigés

01 Définition et formule générale

Soit n un entier naturel non nul. Une **racine n -ième de l'unité** est un nombre complexe z qui vérifie $z^n = 1$. On note $\mathcal{U}_n$ l'ensemble de ces racines. Alors :

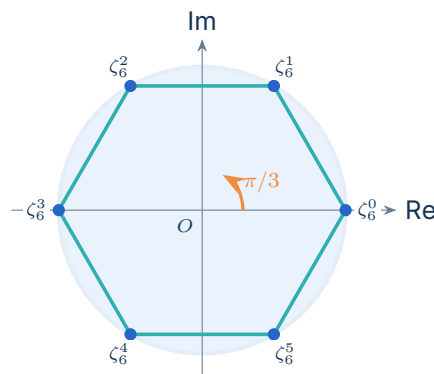
$$\mathcal{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} ; k = 0, 1, \dots, n-1 \right\} \quad \text{et} \quad \zeta_n = e^{\frac{2i\pi}{n}}.$$

Ainsi, $\mathcal{U}_n = \{1, \zeta_n, \zeta_n^2, \dots, \zeta_n^{n-1}\}$.

Démonstration de la formule

Si $z^n = 1$, alors $|z|^n = 1$, donc $|z| = 1$ et $z = e^{i\theta}$. L'égalité $e^{in\theta} = 1$ équivaut à $n\theta = 2k\pi$ pour un entier k , soit $z = e^{2ik\pi/n}$. Deux indices k et ℓ donnent le même nombre exactement lorsque n divise $k - \ell$: il y a donc **exactement n racines distinctes**, obtenues pour $0 \leq k < n$.

Exemple géométrique : les six racines de $z^6 = 1$



À retenir

Les racines sont sur le **cercle unité** et forment les sommets d'un **polygone régulier** centré en O . L'écart angulaire entre deux sommets consécutifs vaut $\frac{2\pi}{n}$.

02 / LECTURE GÉOMÉTRIQUE

Cercle unité et symétries

Trois propriétés géométriques

Pour toute racine $z \in \mathcal{U}_n$:

- $|z| = 1$: son point image appartient au cercle trigonométrique ;
- $\bar{z} = \frac{1}{z}$: la conjugaison réalise la symétrie par rapport à l'axe réel ;
- la multiplication par ζ_n correspond à une rotation d'angle $2\pi/n$.

Démonstrations courtes

L'égalité $|z| = 1$ implique $z\bar{z} = |z|^2 = 1$; donc $\bar{z} = 1/z$. Par ailleurs, si $z = e^{i\theta}$, alors $z\zeta_n = e^{i(\theta+2\pi/n)}$: l'argument augmente de $2\pi/n$.

Cas particulièrement utiles

Nombre	Condition pour appartenir à $\mathcal{U}_n$
1	Toujours, quel que soit $n \geq 1$
-1	Si et seulement si n est pair
i et $-i$	Si et seulement si 4 divise n

Pourquoi ?

On a $(-1)^n = 1$ exactement lorsque n est pair. De même, les puissances de i sont périodiques de période 4, donc $i^n = 1$ exactement lorsque $4 \mid n$; le même raisonnement vaut pour $-i$.

Exemple corrigé — Racines quatrièmes de l'unité

Pour $n = 4$, les arguments sont $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$. Donc

$$\mathcal{U}_4 = \{1, i, -1, -i\}.$$

Sur le cercle unité, ces points forment un **carré**, et l'on vérifie $1 + i - 1 - i = 0$.

Attention à l'argument

Deux arguments qui diffèrent de 2π représentent le **même nombre complexe**. On doit donc prendre $k = 0, \dots, n-1$, sans ajouter une racine supplémentaire pour $k = n$.

03 / OUTILS ALGÈBRIQUES

Sommes, produits et factorisation

Théorème — Factorisation de $X^n - 1$

Les n racines de l'unité sont toutes distinctes; ainsi :

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \zeta_n^k).$$

Il s'agit d'une identité polynomiale valable sur $\mathbb{C}$.

Démonstration

Le polynôme $P(X) = X^n - 1$ est de degré n et admet les n racines distinctes $\zeta_n^0, \dots, \zeta_n^{n-1}$. Il est unitaire, donc la factorisation par ses racines s'écrit exactement sous la forme annoncée.

Théorème — Somme et produit des racines

Pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \zeta_n^k = 0 \quad \text{et} \quad \prod_{k=0}^{n-1} \zeta_n^k = (-1)^{n-1}.$$

Démonstrations

Somme. Comme $\zeta_n^n = 1$ et $\zeta_n \neq 1$ pour $n \geq 2$, la somme géométrique donne

$$1 + \zeta_n + \dots + \zeta_n^{n-1} = \frac{1 - \zeta_n^n}{1 - \zeta_n} = 0.$$

Produit. Dans la factorisation de $X^n - 1$, prenons $X = 0$:

$$-1 = \prod_{k=0}^{n-1} (-\zeta_n^k) = (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} \zeta_n^k,$$

d'où $\prod_{k=0}^{n-1} \zeta_n^k = (-1)^{n+1} = (-1)^{n-1}$.

Exemple corrigé — Une identité trigonométrique

Prenons $n = 5$ et séparons les parties réelle et imaginaire de $\sum_{k=0}^4 e^{2ik\pi/5} = 0$. Il vient :

$$\sum_{k=0}^4 \cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right) = 0 \quad \sum_{k=0}^4 \sin\left(\frac{2k\pi}{5}\right) = 0.$$

Vigilance pour $n = 1$

On a $\mathcal{U}_1 = \{1\}$. La somme vaut alors 1 (et non 0), tandis que la formule du produit reste valable.

05 / MÉTHODE DE RÉOLUTION

Au-delà de l'unité : $z^n = a$ **Théorème — Racines n -ièmes d'un complexe non nul**

Soit $a = \rho e^{i\theta}$, avec $\rho > 0$, et $n \geq 1$. L'équation $z^n = a$ possède exactement n solutions distinctes :

$$z_k = \rho^{1/n} e^{\frac{i(\theta+2k\pi)}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Toutes sont obtenues en multipliant une solution particulière z_0 par les racines n -ièmes de l'unité : $z_k = z_0 \zeta_n^k$.

Démonstration

Écrivons $z = r e^{i\varphi}$, avec $r \geq 0$. L'égalité $z^n = a$ donne $r^n = \rho$ et $n\varphi = \theta + 2k\pi$. On en déduit $r = \rho^{1/n}$ et $\varphi = (\theta + 2k\pi)/n$. Les n valeurs obtenues pour $k = 0, \dots, n-1$ sont distinctes.

Exemple 1 — Résoudre $z^3 = 8$

Puisque $8 = 8e^{i0}$, les trois solutions sont $z_k = 2e^{2ik\pi/3}$ pour $k = 0, 1, 2$.

$$S = \{2, -1 + i\sqrt{3}, -1 - i\sqrt{3}\}.$$

Vérification : $(2\zeta_3^k)^3 = 8(\zeta_3^3)^k = 8$.

Exemple 2 — Résoudre $z^4 = -16$

Comme $-16 = 16e^{i\pi}$, les quatre solutions sont $z_k = 2e^{i(\pi/4+k\pi/2)}$ pour $k = 0, 1, 2, 3$. Après passage à la forme algébrique :

$$S = \{\sqrt{2}(1+i), \sqrt{2}(-1+i), \sqrt{2}(-1-i), \sqrt{2}(1-i)\}.$$

Chaque solution a pour module 2 et les arguments diffèrent de $\pi/2$.

Cas particulier : $a = 0$

L'équation $z^n = 0$ possède une **seule solution**, $z = 0$. On n'applique la formule des n solutions distinctes que si $a \neq 0$.

06 / EXERCICES CORRIGÉS

S'entraîner et retenir l'essentiel

Exercice 1 — Déterminer $\mathcal{U}_3$

Question. Résoudre $z^3 = 1$ sous forme algébrique.

Correction. Les arguments sont $0, 2\pi/3$ et $4\pi/3$. Donc :

$$\mathcal{U}_3 = \left\{ 1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

Leur somme est nulle, conformément au théorème.

Exercice 2 — Calculer une somme trigonométrique

Question. Calculer $T = \sum_{k=0}^6 \cos\left(\frac{4k\pi}{7}\right)$.

Correction. Posons $q = e^{4i\pi/7}$. Alors $q^7 = 1$ et $q \neq 1$, d'où

$$\sum_{k=0}^6 q^k = \frac{1 - q^7}{1 - q} = 0.$$

En prenant les parties réelles, on obtient $T = 0$.

Mini-démonstration — Une somme géométrique classique

Si $z^n = 1$ avec $z \neq 1$, alors $(z - 1)(1 + z + \dots + z^{n-1}) = z^n - 1 = 0$. Comme $z - 1 \neq 0$, nécessairement

$$1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = 0.$$