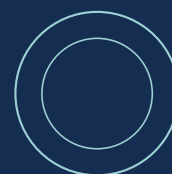


LES INTÉGRALES À BORNES VARIABLES

$$G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$$

Existence • Définition • Dérivation • Calcul • Applications



1. Cadre et définition

Soient I un **intervalle** de $\mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction **continue**, J un intervalle de $\mathbb{R}$ et deux fonctions $u, v : J \rightarrow I$. On définit, pour chaque $x \in J$:

$$G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$$

t est la **variable d'intégration**; x est le **paramètre** qui détermine les deux bornes. Les bornes ne sont pas nécessairement dans l'ordre croissant.

2. Pourquoi cette intégrale existe-t-elle ?

Pour tout $x \in J$, les nombres $u(x)$ et $v(x)$ appartiennent à l'intervalle I . Le segment $[\min(u(x), v(x)), \max(u(x), v(x))]$ est donc inclus dans I .

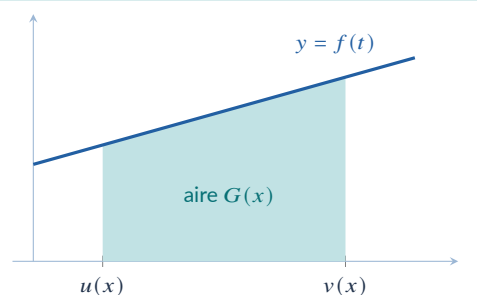
La fonction f étant continue sur ce segment fermé et borné, elle y est intégrable. Ainsi, $G(x)$ est bien définie pour tout $x \in J$.

Extension. Il suffit en réalité que f soit intégrable sur tout segment reliant les deux bornes ; la continuité est une hypothèse pratique et suffisante.

3. Sens géométrique

Lorsque $u(x) \leq v(x)$ et $f \geq 0$ entre ces bornes, $G(x)$ est l'aire sous la courbe de f . Si les bornes sont inversées, *l'intégrale change de signe*.

Exemple illustré : $f(t) = 1 + 0,5t$, $u(x) = 0,4$ et $v(x) = 1,8$ (à un x fixé).



À distinguer

Une intégrale à bornes variables est une **fonction de x** . Une intégrale à bornes numériques, comme $\int_1^3 f(t) dt$, est un **nombre**.

2

Propriétés de calcul

Des identités valables pour chaque valeur de x

Propriétés algébriques fondamentales

Pour des bornes a, b, c dans I (qui peuvent dépendre de x) :

Bornes égales : $\int_a^a f(t) dt = 0.$

Changement de sens : $\int_a^b f(t) dt = -\int_b^a f(t) dt.$

Relation de Chasles : $\int_a^c f(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt.$

Linéarité : $\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt.$

Démonstration des trois premières identités

Fixons $c_0 \in I$ et posons $F(y) = \int_{c_0}^y f(t) dt$. Pour toutes bornes a, b , on dispose de $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$. D'où

$$F(a) - F(a) = 0, \quad F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)),$$

et

$$(F(b) - F(a)) + (F(c) - F(b)) = F(c) - F(a).$$

La linéarité découle de celle de l'intégrale à bornes fixes.

Ordre, positivité et encadrement

Si $a \leq b$ et $f(t) \geq 0$ sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(t) dt \geq 0.$$

Si $m \leq f(t) \leq M$ sur $[a, b]$, alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t) dt \leq M(b-a).$$

Si $|f(t)| \leq M$ sur le segment entre a et b , quel que soit l'ordre des bornes :

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq M|b-a|.$$

Idée de démonstration de l'encadrement

On intègre les inégalités $m \leq f(t) \leq M$ de a à b avec $a \leq b$: $\int_a^b m dt \leq \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b M dt$. Pour le module, on utilise $-M \leq f \leq M$ et, si nécessaire, on échange les bornes.

Exemple — signe sans calculer l'intégrale

Soit $A(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} (1+t^2) dt$. Puisque $1+t^2 > 0$, le signe de $A(x)$ est celui de $\cos x - \sin x$. En particulier, $A(\pi/4) = 0$.

3

Continuité et dérivation

Le théorème central à connaître et à démontrer

Continuité de la fonction à bornes variables

Si f est continue sur I et si u et v sont continues sur J , alors

$$G : x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) \, dt \quad \text{est continue sur } J.$$

Démonstration

Fixons $c \in I$. La fonction $F(y) = \int_c^y f(t) \, dt$ est continue sur I (elle est même dérivable). Or, par la relation de Chasles,

$$G(x) = F(v(x)) - F(u(x)).$$

Les deux compositions sont continues ; leur différence l'est donc aussi.

Dérivation d'une intégrale à deux bornes variables

Supposons f continue sur I et u, v dérivables en $x \in J$. Alors G est dérivable en x et

$$G'(x) = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x).$$

Démonstration complète (théorème fondamental + chaîne)

Choisissons $c \in I$ et définissons $F(y) = \int_c^y f(t) \, dt$. Le théorème fondamental de l'analyse garantit $F'(y) = f(y)$ pour tout $y \in I$ (aux points intérieurs ; on raisonne sur les domaines de dérivabilité). On a $G = F \circ v - F \circ u$. La règle de dérivation des fonctions composées donne

$$\begin{aligned} G'(x) &= F'(v(x))v'(x) - F'(u(x))u'(x) \\ &= f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x). \end{aligned}$$

Cas particuliers à mémoriser

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\int_a^{v(x)} f(t) \, dt \right) &= f(v(x))v'(x) \quad (a \text{ constant}), \\ \frac{d}{dx} \left(\int_{u(x)}^b f(t) \, dt \right) &= -f(u(x))u'(x) \quad (b \text{ constant}), \\ \frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) \, dt \right) &= f(x). \end{aligned}$$

Attention au signe

Borne supérieure : « + » ; borne inférieure : « - ». Il faut aussi dériver la borne elle-même : ne pas oublier $u'(x)$ et $v'(x)$. La formule présentée concerne l'intégrande $f(t)$, sans dépendance explicite en x .

4

Calcul par une primitive

Une méthode directe pour obtenir une expression explicite

Formule de Newton–Leibniz

Si F est une primitive de f sur I , alors pour tout $x \in J$:

$$G(x) = F(v(x)) - F(u(x)).$$

Cette formule est valable **même si** $u(x) > v(x)$.

Démonstration

Par définition d'une primitive, $F' = f$. Le théorème fondamental donne $\int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt = [F(t)]_{u(x)}^{v(x)} = F(v(x)) - F(u(x))$. La constante éventuellement ajoutée à la primitive s'annule dans la différence.

Exemple 1 — bornes x et x^2

Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $G(x) = \int_x^{x^2} 2t dt$. Une primitive de $2t$ est $F(t) = t^2$. Donc

$$G(x) = x^4 - x^2.$$

Vérification de la dérivée par deux méthodes :

$$\underbrace{G'(x)}_{\text{expression obtenue}} = 4x^3 - 2x = \underbrace{2x^2 \cdot 2x - 2x \cdot 1}_{\text{formule avec les bornes}}.$$

Exemple 2 — borne exponentielle et logarithme

Pour $x \in \mathbb{R}$, soit $H(x) = \int_1^{e^x} \frac{1}{t} dt$. Comme $e^x > 0$, les deux bornes sont dans $I =]0, +\infty[$. Une primitive est $\ln t$. Ainsi

$$H(x) = \ln(e^x) - \ln 1 = x.$$

De plus, $H'(x) = \frac{1}{e^x} \cdot e^x = 1$, ce qui confirme le résultat.

Exemple 3 — bornes symétriques

Soit $K(x) = \int_{-x}^x \cos t dt$. Une primitive est $\sin t$, d'où

$$K(x) = \sin x - \sin(-x) = 2 \sin x.$$

La dérivée vérifie : $K'(x) = \cos x + \cos(-x) = 2 \cos x$.

Plus généralement : si f est paire, $\int_{-x}^x f(t) dt = 2 \int_0^x f(t) dt$; si f est impaire, cette intégrale est nulle.

5

Dériver sans primitive

L'avantage majeur de la formule des bornes variables

Exemple 4 — une intégrale sans primitive élémentaire

On considère, sur $\mathbb{R}$,

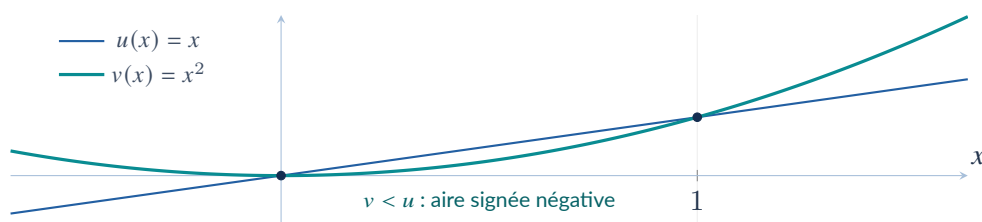
$$A(x) = \int_x^{x^2} e^{t^2} dt.$$

La fonction $t \mapsto e^{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$: A est bien définie et dérivable. Même sans disposer d'une primitive élémentaire,

$$A'(x) = 2x e^{x^4} - e^{x^2}.$$

Comme $e^{t^2} > 0$, le signe de $A(x)$ dépend uniquement de l'ordre de x et x^2 :

x	$] -\infty, 0[$	0	$] 0, 1[$	1	$] 1, +\infty[$
$x^2 - x$	+	0	-	0	+
$A(x)$	+	0	-	0	+



Entre 0 et 1, la borne x^2 se situe au-dessous de la borne x .

Exemple 5 — étude des variations sans calculer l'intégrale

On pose $B(x) = \int_x^{x+1} \frac{1}{1+t^2} dt$. Alors

$$\begin{aligned} B'(x) &= \frac{1}{1+(x+1)^2} - \frac{1}{1+x^2} \\ &= \frac{-2x-1}{(1+(x+1)^2)(1+x^2)}. \end{aligned}$$

Le dénominateur est strictement positif. Donc B est **croissante** sur $] -\infty, -\frac{1}{2}]$, puis **décroissante** sur $[-\frac{1}{2}, +\infty[$. Son maximum vaut

$$B(-\tfrac{1}{2}) = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{1+t^2} dt = 2 \arctan(\tfrac{1}{2}).$$

6

Méthode et exercices corrigés

Les bons réflexes, du domaine à la dérivée

Méthode en quatre étapes

- 1. Domaine :** vérifier que $u(x)$ et $v(x)$ appartiennent à un même intervalle où f est continue (ou intégrable).
- 2. Nature de la question :** pour *calculer*, chercher une primitive ; pour *dériver*, appliquer directement la formule des bornes.
- 3. Substitution :** écrire $f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x)$, avec les deux facteurs de chaîne.
- 4. Simplifier et interpréter :** exploiter le signe de f , l'ordre des bornes et, si utile, les variations.

Exercice corrigé 1 — expression et dérivée

Sur $\mathbb{R}$, on pose $P(x) = \int_x^{2x} t^2 \, dt$. Déterminer $P(x)$ et $P'(x)$.

Solution. Une primitive de t^2 est $t^3/3$, d'où

$$P(x) = \frac{(2x)^3 - x^3}{3} = \boxed{\frac{7}{3}x^3}, \quad P'(x) = \boxed{7x^2}.$$

Contrôle : $P'(x) = (2x)^2 \cdot 2 - x^2 \cdot 1 = 7x^2$.

Exercice corrigé 2 — deux bornes composées

On considère $Q(x) = \int_{x^2}^{x^2+1} t \, dt$. Montrer que $Q'(x) = 2x$.

Solution 1 (dérivation).

$$Q'(x) = (x^2 + 1) \cdot 2x - (x^2) \cdot 2x = \boxed{2x}.$$

Solution 2 (calcul). $Q(x) = \frac{1}{2}[(x^2 + 1)^2 - x^4] = x^2 + \frac{1}{2}$, donc $Q'(x) = 2x$.

Trois erreurs fréquentes

- Écrire $G'(x) = f(v(x)) - f(u(x))$ sans les facteurs $v'(x)$ et $u'(x)$.
- Oublier le signe « $-$ » devant la contribution de la borne inférieure.
- Supposer que $G(x) \geq 0$ dès que $f \geq 0$, sans vérifier que $u(x) \leq v(x)$.

L'essentiel à retenir

$$\text{Calcul : } \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) \, dt = F(v(x)) - F(u(x))$$

$$\text{Dérivation : } \frac{d}{dx} \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) \, dt = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x)$$