

La loi des probabilités totales

Définition, démonstrations et exemples illustratifs

Idée essentielle. Pour calculer la probabilité d'un événement E , on peut répartir toutes les situations possibles en plusieurs cas distincts, puis additionner les contributions de ces cas.

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B_i) \mathbb{P}(E \mid B_i)$$

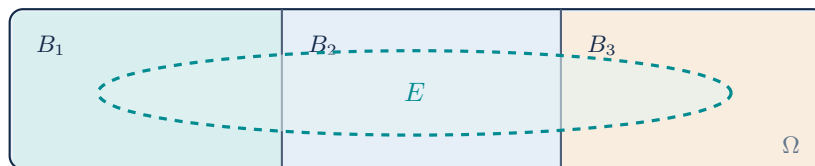
01 Vocabulaire et conditions

Système complet d'événements

Une famille $(B_1, \dots, B_n)$ forme une **partition** de l'univers Ω si :

$$\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega \quad \text{et} \quad B_i \cap B_j = \emptyset \quad (i \neq j).$$

Ainsi, tout résultat appartient à **un et un seul** des événements B_i . Pour utiliser $\mathbb{P}(E \mid B_i)$, on suppose en outre $\mathbb{P}(B_i) > 0$.



L'événement E est découpé en parties disjointes : $E \cap B_1$, $E \cap B_2$ et $E \cap B_3$.

02 Énoncé et démonstration

Loi des probabilités totales

Si $(B_1, \dots, B_n)$ est un système complet d'événements de probabilités strictement positives, alors pour tout événement E :

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(E \cap B_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B_i) \mathbb{P}(E \mid B_i).$$

Démonstration

Comme les B_i constituent une partition, on a $E = \bigcup_{i=1}^n (E \cap B_i)$, réunion d'événements deux à deux disjoints. Par **additivité** :

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(E \cap B_i).$$

Puis, par la définition d'une probabilité conditionnelle, $\mathbb{P}(E \cap B_i) = \mathbb{P}(B_i) \mathbb{P}(E \mid B_i)$. En remplaçant chaque terme, on obtient la formule annoncée. $\square$

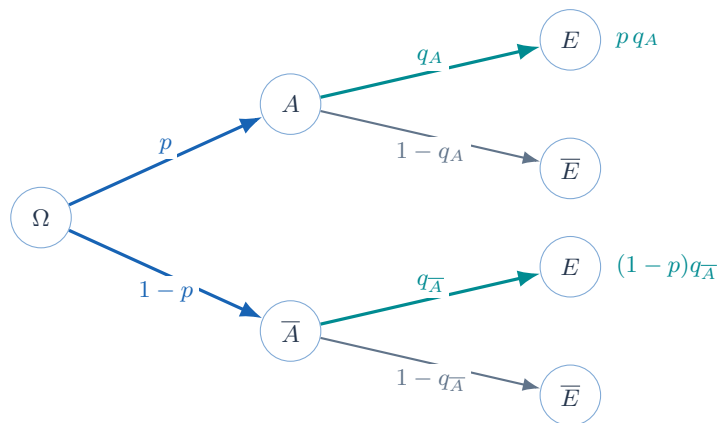
Cas particulier : deux événements

Si A et $\bar{A}$ forment la partition, alors

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(E \mid A) + \mathbb{P}(\bar{A}) \mathbb{P}(E \mid \bar{A}).$$

03 Arbre pondéré : comprendre le calcul

L'arbre permet de parcourir tous les scénarios. Sur un chemin, on **multiplie** les probabilités ; pour un même événement final, on **additionne** celles des chemins qui y conduisent.



Lecture de l'arbre

Avec $p = \mathbb{P}(A)$, $q_A = \mathbb{P}(E | A)$ et $q_{\bar{A}} = \mathbb{P}(E | \bar{A})$:

$$\mathbb{P}(E) = p q_A + (1 - p) q_{\bar{A}}.$$

04 Exemple 1 — Deux ateliers de fabrication

Énoncé et résolution

Une entreprise reçoit 60 % de ses pièces de l'atelier A et 40 % de l'atelier B. On sait que 2 % des pièces de A et 5 % de celles de B sont défectueuses. Une pièce est choisie au hasard. Calculer $\mathbb{P}(D)$, où D signifie « pièce défectueuse ».

Étape 1. Les ateliers forment une partition ; on pose :

$$\mathbb{P}(A) = 0,60, \quad \mathbb{P}(B) = 0,40, \quad \mathbb{P}(D | A) = 0,02, \quad \mathbb{P}(D | B) = 0,05.$$

Étape 2. On applique la loi des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(D) &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(D | A) + \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(D | B) \\ &= 0,60 \times 0,02 + 0,40 \times 0,05 \\ &= 0,012 + 0,020 = \boxed{0,032}. \end{aligned}$$

Conclusion. 3,2 % des pièces de la production globale sont défectueuses.

Contribution de chaque atelier à la probabilité totale

Atelier A	0,012
Atelier B	0,020

Procédure efficace

1. Définir les événements. **2.** Vérifier la partition. **3.** Lire les probabilités conditionnelles. **4.** Multiplier, puis additionner.

05 Plusieurs cas : trois événements ou davantage

La formule reste identique avec 3, 4 ou n événements. Les coefficients $\mathbb{P}(B_i)$ représentent la fréquence des différents cas ; leur somme vaut 1.

Exemple 2 — Trois urnes

On choisit au hasard une urne parmi U_1, U_2, U_3 avec les probabilités respectives 0,50, 0,30 et 0,20. Puis on tire une boule. Les proportions de boules rouges dans les urnes sont respectivement 0,20, 0,50 et 0,80.

On note R l'événement « la boule tirée est rouge ». Alors :

	U_1	U_2	U_3
$\mathbb{P}(U_i)$	0,50	0,30	0,20
$\mathbb{P}(R U_i)$	0,20	0,50	0,80

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R) &= \mathbb{P}(U_1)\mathbb{P}(R | U_1) + \mathbb{P}(U_2)\mathbb{P}(R | U_2) + \mathbb{P}(U_3)\mathbb{P}(R | U_3) \\ &= 0,50 \times 0,20 + 0,30 \times 0,50 + 0,20 \times 0,80 \\ &= 0,10 + 0,15 + 0,16 = \boxed{0,41}.\end{aligned}$$

La probabilité de tirer une boule rouge est donc 41 %.

Décomposition de la probabilité $\mathbb{P}(R)$



06 Lien avec la formule de Bayes

La loi des probabilités totales calcule $\mathbb{P}(E)$; la formule de Bayes permet ensuite de **remonter au cas d'origine** lorsqu'on sait que E s'est produit.

Formule de Bayes, avec une partition

Si $\mathbb{P}(E) > 0$, alors, pour tout j tel que $\mathbb{P}(B_j) > 0$:

$$\mathbb{P}(B_j | E) = \frac{\mathbb{P}(B_j)\mathbb{P}(E | B_j)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B_i)\mathbb{P}(E | B_i)}.$$

Démonstration

Par la définition d'une probabilité conditionnelle :

$$\mathbb{P}(B_j | E) = \frac{\mathbb{P}(B_j \cap E)}{\mathbb{P}(E)} = \frac{\mathbb{P}(B_j)\mathbb{P}(E | B_j)}{\mathbb{P}(E)}.$$

On remplace le dénominateur $\mathbb{P}(E)$ par son expression donnée par la loi des probabilités totales. $\square$

Retour à l'exemple des urnes

Sachant que la boule est rouge, la probabilité qu'elle provienne de l'urne U_3 est

$$\mathbb{P}(U_3 | R) = \frac{0,20 \times 0,80}{0,41} = \frac{16}{41} \approx 39,0 \%.$$

07 Exemple 3 — Un test de dépistage

Comprendre l'effet de la fréquence initiale

Dans une population, 1 % des individus présentent une caractéristique M . Un test est positif dans 95 % des cas où M est présente, mais il est également positif chez 10 % des individus qui ne présentent pas M .

On note T : « test positif ».

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T) &= \mathbb{P}(M)\mathbb{P}(T \mid M) + \mathbb{P}(\overline{M})\mathbb{P}(T \mid \overline{M}) \\ &= 0,01 \times 0,95 + 0,99 \times 0,10 \\ &= 0,0095 + 0,099 = \boxed{0,1085}.\end{aligned}$$

La probabilité d'un test positif dans la population est donc 10,85 %.

Question complémentaire. Quelle est la probabilité de M sachant que le test est positif ?

$$\mathbb{P}(M \mid T) = \frac{0,01 \times 0,95}{0,1085} = \boxed{\frac{19}{217} \approx 8,76 \%}.$$

Interprétation. Une bonne détection ne suffit pas à rendre $\mathbb{P}(M \mid T)$ élevée lorsque M est rare dans la population.

08 Propriétés utiles

Encadrement par les probabilités conditionnelles

Pour une partition finie (B_i) de probabilités positives et de somme 1 :

$$\min_i \mathbb{P}(E \mid B_i) \leq \mathbb{P}(E) \leq \max_i \mathbb{P}(E \mid B_i).$$

Démonstration. Posons $m = \min_i \mathbb{P}(E \mid B_i)$ et $M = \max_i \mathbb{P}(E \mid B_i)$. On a $m \leq \mathbb{P}(E \mid B_i) \leq M$. Après multiplication par $\mathbb{P}(B_i) \geq 0$, sommation et utilisation de $\sum_i \mathbb{P}(B_i) = 1$, on obtient $m \leq \mathbb{P}(E) \leq M$.

Cas de l'indépendance

Si l'événement E est indépendant de chaque B_i de la partition, alors $\mathbb{P}(E \mid B_i) = \mathbb{P}(E)$: la loi devient

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E) \sum_i \mathbb{P}(B_i) = \mathbb{P}(E).$$

La formule reste vraie, mais l'arbre n'apporte plus d'information sur E .

Pièges fréquents

- Ne pas confondre $\mathbb{P}(E \mid B_i)$ et $\mathbb{P}(B_i \mid E)$.
- Ne pas additionner les probabilités conditionnelles seules : chacune doit être pondérée par $\mathbb{P}(B_i)$.
- Vérifier que les B_i sont **exhaustifs et deux à deux incompatibles**.
- Si $\mathbb{P}(B_i) = 0$, la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(E \mid B_i)$ n'est pas définie par le quotient usuel ; on utilise plutôt la première formule, avec $\mathbb{P}(E \cap B_i) = 0$.

09 Exercices d'application

Exercice 1 — Contrôle qualité. Un magasin achète 70 % de ses articles chez F_1 et 30 % chez F_2 . La proportion d'articles défectueux est de 1 % chez F_1 et de 4 % chez F_2 . Calculer la probabilité qu'un article choisi au hasard soit défectueux.

Exercice 2 — Réussite à un examen. Trois groupes G_1, G_2, G_3 représentent respectivement 20 %, 50 % et 30 % des élèves. Leurs taux de réussite sont 80 %, 60 % et 40 %.

- Calculer la probabilité qu'un élève choisi au hasard réussisse.
- Sachant qu'un élève a réussi, calculer la probabilité qu'il appartienne à G_2 .

Exercice 3 — Retrouver une probabilité conditionnelle. On sait que

$$\mathbb{P}(A) = 0,40, \quad \mathbb{P}(E) = 0,34, \quad \mathbb{P}(E | A) = 0,55.$$

Calculer $\mathbb{P}(E | \bar{A})$.

10 Corrigés rédigés

Correction de l'exercice 1

Les événements « fournisseur F_1 » et « fournisseur F_2 » forment une partition. Si D désigne « article défectueux », alors

$$\mathbb{P}(D) = 0,70 \times 0,01 + 0,30 \times 0,04 = 0,007 + 0,012 = \boxed{0,019}.$$

Réponse : 1,9 % des articles sont défectueux.

Correction de l'exercice 2

On note S : « l'élève réussit ». Pour la question (a) :

$$\mathbb{P}(S) = 0,20 \times 0,80 + 0,50 \times 0,60 + 0,30 \times 0,40 = 0,16 + 0,30 + 0,12 = \boxed{0,58}.$$

Pour la question (b), on applique Bayes :

$$\mathbb{P}(G_2 | S) = \frac{\mathbb{P}(G_2)\mathbb{P}(S | G_2)}{\mathbb{P}(S)} = \frac{0,50 \times 0,60}{0,58} = \boxed{\frac{15}{29} \approx 51,72 \%}.$$

Correction de l'exercice 3

Comme $\mathbb{P}(\bar{A}) = 0,60$, la formule donne

$$0,34 = 0,40 \times 0,55 + 0,60 \times \mathbb{P}(E | \bar{A}).$$

D'où $0,60\mathbb{P}(E | \bar{A}) = 0,12$, puis $\mathbb{P}(E | \bar{A}) = \boxed{0,20}$.

Fiche-mémoire à recopier

$$\mathbb{P}(E) = \sum_i \mathbb{P}(B_i)\mathbb{P}(E | B_i)$$

$$\mathbb{P}(B_j | E) = \frac{\mathbb{P}(B_j)\mathbb{P}(E | B_j)}{\mathbb{P}(E)}$$

PARTITION $\rightarrow$ **MULTIPLICATION SUR LES BRANCHES** $\rightarrow$ **SOMME DES CHEMINS**