

Équations, limites et étude de fonctions

Expressions radicales · Dérivation · Courbes et réciproques

TROIS EXERCICES · ÉNONCÉS REFORMULÉS

EXERCICE 01 Équations avec des racines

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les deux équations suivantes, en précisant chaque fois les conditions d'existence :

- $\sqrt{x+1} + 2\sqrt[3]{x+1} = 3\sqrt[6]{x+1}$.
- $\sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{x-4} = 2$.

EXERCICE 02 Calcul de limites

Calculer les limites suivantes. Justifier les transformations effectuées.

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{1-x^3} + x \right)$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{1+x} - 1}{x}$.

EXERCICE 03 Étude complète de deux fonctions

Partie A. On considère la fonction f définie sur $I =]-1, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{2}{\sqrt{x+1}}.$$

- Calculer $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- Étudier les branches infinies de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$.
- Montrer que, pour tout $x \in I$,

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{(x+1)^2}.$$

Étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f .

- Vérifier que, pour tout $x \in I$,

$$f''(x) = \frac{4 - 3\sqrt{x+1}}{2(x+1)^3}.$$

En déduire les intervalles de convexité et de concavité de f , puis déterminer les coordonnées du point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

- Tracer $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

Précision de transcription. Le facteur 2 au dénominateur de la formule de f'' a été rétabli après vérification du calcul ; il semble absent sur la photographie.

Partie B. On considère la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par

$$g(x) = 1 - x(\sqrt[3]{x+1})^3.$$

- Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
- Étudier le sens de variation de g sur son ensemble de définition.
- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α appartenant à $]0, 1[$.
- Justifier que g est bijective de $[0, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera, puis préciser le domaine de définition de g^{-1} .
- Déterminer l'expression de $g^{-1}(x)$ pour $x \in J$, et en déduire que $\alpha = \sqrt{5} - 2$.