

Racines cubiques et bijections

Continuité • Équations • Limites • Fonction réciproque

CINQ EXERCICES • ÉNONCÉS TRADUITS

EXERCICE 01 Fonction définie par morceaux

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^3 + 1}, & \text{si } x \geq -1, \\ \frac{(x+1)^2}{\sqrt[3]{x^2 + 7} - 2}, & \text{si } x < -1. \end{cases}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f .
2. Étudier la continuité de f en -1 .

EXERCICE 02 Résolution d'équations dans $\mathbb{R}$

Résoudre les équations suivantes, en indiquant les valeurs interdites éventuelles :

1. $\sqrt[3]{x^2 - 1} - 2 = 0$.
2. $\left(\frac{2 - \sqrt[3]{x+1}}{1 - \sqrt[3]{x+1}} \right)^2 - 4 = 0$.

EXERCICE 03 Trois limites à calculer

Calculer et justifier les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[4]{x^4 + 1} + x + 2 \right)$.
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4 + x^2 + 1} - x}$.
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{8x^3 + 2} - 2x \right)$.

EXERCICE 04 Une bijection polynomiale

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 1.$$

1. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.
2. Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = (x - 2)^3 + 7.$$

3. En déduire l'expression de $f^{-1}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$x^3 - 6x^2 + 12x + 3 = 0.$$

EXERCICE 05 Encadrement d'une solution réelle

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = x^3 + 1 - \frac{4}{x}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f et étudier sa restriction à $]0, +\infty[$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0, +\infty[$, puis établir

$$\alpha^3 + 1 = \frac{4}{\alpha}.$$

3. Montrer que $\alpha \in]1, 2[$.
4. À l'aide d'un tableau de valeurs ou d'une méthode d'encadrement, donner un intervalle contenant α et d'amplitude 0,2.